

# WAVELETOVÁ TRANSFORMACE

Jaroslav Fiala

ŠKODA Výzkum s.r.o., 31600 Plzeň

## Abstrakt

Waveletová transformace je popisována v termínech funkcionální analýzy a geometrie Hilbertova prostoru. Vysvětluje se, v čem spočívá její odlišnost od jiných integrálních transformací. Na několika příkladech je ilustrováno, jak se tato specifická transformace dá s výhodou využít při analýze signálů.

## 1. Úvod

Vznik waveletové transformace je spojen se jménem francouzského geofyzika Jeana Morleta, který ji vymyslel na začátku 80. let (tohoto století) jako nástroj pro analýzu seismických signálů [1, 2]. Na rozdíl od Fourierovy transformace, která byla koncipována sice také ve Francii, ale na začátku minulého století [3], a to jako nástroj pro zkoumání šíření tepla, těšila se waveletová transformace již od svého počátku velké přízni a čínskému zájmu jak matematiků, tak i zájemců o její využití při zpracování signálů a obrazové informace v nejrůznějších botech. Velmi brzo se waveletové transformace zmocnili také teoretičtí fyzici, kteří ji využívají v kvantové mechanice [4-7]. A tak už za pouhých šestnáct let po objevu waveletové transformace o ní máme několik monografií [8-15], k dostání je řada komerčních počítačových programů pro waveletovou transformaci (jmenujme například Wavelet Toolbox v MATLABu) a ročně vychází několik set článků zabývajících se jak metodickým vývojem, tak i nejrůznějšími aplikacemi waveletové transformace; občas se objeví i velmi pěkný článek revuální [16-22]. Jean Baptiste Joseph baron de Fourier to měl před 180 lety mnohem těžší; jeho současníci - Lagrange, Laplace, Legendre, Biot a Poisson - byli k Fourierovým myšlenkám skeptičtí a také vypracování celé teorie se pořádně protáhlo. V jeho průběhu však bylo dosaženo mimořádně závažných výsledků (patří k nim zavedení Riemannova integrálu) a další vývoj Fourierovy transformace byl těsně propojen se vznikem funkcionální analýzy a teorie distribucí. Není divu, že v takto zbudovaném prostředí se waveletová transformace dobře rodila a prospívala. Ostatně z hlediska funkcionální analýzy je waveletová transformace Fourierovou transformací v širším slova smyslu.

## 2. Analytické aspekty

Waveletová transformace je integrální transformace definovaná vztahem

$$w(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_{a,b}(t-b)} dt \quad (1)$$

kteřá reálnému vzoru (signálu)  $f(t)$  přiřazuje jako obraz funkci dvou reálných proměnných  $w(a,b)$  definovanou v polorovině ( $a > 0, b$ ); pruh znamená komplexně sdruženou hodnotu. Jádrem této integrální transformace jsou tzv. (dceřinné) wavelety  $g_{a,b}(t)$ , odvozené z nějakého mateřského waveletu  $g(t)$  dilatací resp. kontrakcí a translací

$$g_{a,b}(t) = a^{-1/2} g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

parametr  $b$  vyjadřuje polohu (translaci) a parametr  $a$  měřítko (dilataci, je-li  $a > 1$  či kontrakci, je-li  $a < 1$ ) dceřinného waveletu vůči waveletu mateřskému. Waveletovou transformaci lze také zapsat ve tvaru

$$w(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_{a,0}(t-b)} dt$$

Obraz  $w(a_1,b)$  signálu  $f(t)$ , který vzniká jeho waveletovou transformací ve zvoleném měřítku  $a_1$  jakožto funkce polohového parametru  $b$ , je tedy komposicí (jmenovitě vzájemnou korelací) signálu  $f(t)$  s waveletem  $g_{a_1,0}(t)$ :

$$w(a_1,b) = g_{a_1,0} * f$$

(pro označení korelace používáme hvězdičku). Pro daný wavelet (např.  $g_{a_1,0}(t)$ ) je  $w(a_1,b)$  funkcionálem signálu  $f(t)$ . Celkový obraz  $w(a,b)$  můžeme potom chápat jako kolekci zobrazení  $\{w(a_1,b), w(a_2,b), w(a_3,b), \dots, w(a_n,b), \dots\}$  předmětného signálu  $f(t)$ , pořázených při různých hodnotách měřítka (dilatace - kontrakce, zvětšení - zmenšení)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , tedy jako pole funkcionálů [23], totiž korelací originálního signálu  $f(t)$  s wavelety  $g_{a,0}(t)$ ;  $a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ :

$$w(a,b) = \|g_{a,0} * f\| \quad (2)$$

Jednotlivé řádky této matice jsou obrazy signálu  $f(t)$  uskutečněné waveletovou transformací se zvětšením, které je dané indexem řádku. Sloupce matice ukazují, jak vypadá obraz signálu  $f(t)$  realizovaný waveletovou transformací (resp. jeho amplituda nebo např. fáze) v místě ( $t = b$ ) daném sloupcovým indexem, při různém měřítku (zvětšení), které se mění podél sloupce. Prototyp zobrazení je dán mateřským waveletem  $g(t)$ . Waveletovou transformaci můžeme tedy chápat jako jakýsi matematický mikroskop, kterým pořizujeme obrazy zkoumaných předmětů signálů  $f(t)$  při různém zvětšení ( $1/a$ ) optikou mateřského waveletu.

Podle toho, "jakými brýlemi" chceme zkoumané "předměty" (signály) pozorovat, používáme různé mateřské wavelety  $g(t)$ . Aby mohly sloužit ve funkci filtru (korelace) jako jádro ortogonální transformace, musí mít



kompaktní nosič (uzávěr množiny  $\{t \mid g(t) \neq 0\}$ ) a nulový integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 0 \quad (3)$$

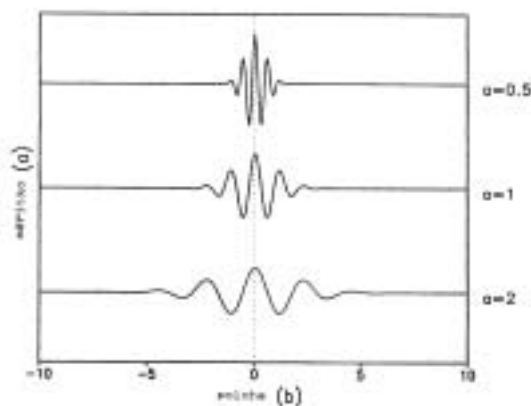
Jsou tedy prakticky všude nulové ať na úzkou oblast (kolem počátku), kde oscilují kolem nuly (aby se splnilo (3)). Vypadají tudíž jako "krátká vlna" - odtud etymologie označení "wavelet" ("ondelette" v jazyce jeho objevitele) - impuls, který během svého krátkého trvání několikrát změní polaritu (zakmitá, zavlní se). Například Morletův wavelet

$$g(t) = \exp(ipt) \exp(-t^2)$$

jehož reálná složka je pro tři různá měřítka znázorněna na obr.1 nebo mexický klobouk

$$g(t) = (1-t^2) \exp(-t^2),$$

což je druhá derivace Gaussovy funkce. Numericky nejjednodušší je Haarův wavelet, který je tvořen obdélníkovými pulsy [24].



Obr.1. Reálná část Morletova waveletu ve třech různých měřících.

### 3. Geometrické aspekty

V (komplexním) Hilbertově prostoru  $L_2$  všech funkcí integrovatelných s kvadrátem [25] lze waveletovou transformantu (1) pojmát jako skalární součin

$$w(a, b) = (\vec{f}, \vec{g}_{a,b})$$

předmětného signálu  $\vec{f} = f(t)$  a příslušného dečinného waveletu  $\vec{g}_{a,b} = g_{a,b}(t)$ . A jsou-li wavelety ortogonální, to jest platí-li

$$(\vec{g}_{a,b}, \vec{g}_{a',b'}) = \frac{1}{a^2 C} \int_{-\infty}^{\infty} a^{1/2} g\left(\frac{t-b}{a}\right) a'^{-1/2} \overline{g\left(\frac{t-b'}{a'}\right)} dt = \delta(a-a') \delta(b-b')$$

kde

$$C = \int_{n=0}^{\infty} |g^+(n)|^2 n^{-1} dn$$

přičemž křížek představuje operátor Fourierovy transformace, a je-li jejich soubor úplný, takťe mohou sloužit jako base toho prostoru, pak lze libovolný signál  $f(t)$  (pojatý jako vektor  $\vec{f}$  či koncový bod radiusvektoru Hilbertova prostoru  $L_2$ ) vyjádřit lineární superposicí těchto waveletů

$$f(t) = C^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(a, b) g_{a,b}(t) a^{-2} da db \quad (4)$$

jejich koeficienty (váhy  $k(a, b)$  odpovídajících waveletů  $g_{a,b}(t)$ ) jsou dány hodnotou waveletové transformanty  $w(a, b)$  signálu  $f(t)$  pro příslušné hodnoty parametrů  $a$  (měřítkového) a  $b$  (translačního)

$$k(a, b) = (\vec{f}, \vec{g}_{a,b}) = w(a, b) \quad (5)$$

Spojením vztahů (4) a (5) dostáváme formulaci

$$f(t) = C^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(a, b) g_{a,b}(t) a^{-2} da db \quad (6)$$

tzv. inverzní waveletové transformace ("inverzní" vzhledem ke vztahu (1), jenž je označován jako "přímá" waveletová transformace) či "waveletové syntesy" - myslí se syntesa zkoumaného signálu  $f(t)$  lineární kombinací waveletů  $g_{a,b}(t)$  (s vahami  $w(a, b)$ ). Oproti tomu, přímá waveletová transformace

$$w(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_{a,b}(t)} dt = (\vec{f}, \vec{g}_{a,b}) \quad (7)$$

je vyjádřením "waveletové analýzy": určuje totiž, jak velké jsou příspěvky jednotlivých waveletů  $g_{a,b}(t)$ , na které zkoumaný signál  $f(t)$  rozkládáme ("analysujeme");  $w(a, b)$  je průmětem signálu  $f(t)$  na (normalisovaný) wavelet  $g_{a,b}(t)$ .

Vztahy podobné rovnicím (6) a (7) platí pro libovolný úplný ortogonální (ortonormální) systém basálních vektorů  $\{\vec{e}_k\}$ , jako jsou například Besselovy funkce, Legendreovy polynomy, Laguerrovy polynomy nebo Hermitovy polynomy. Možnost vyjádřit jakýkoli vektor  $\vec{f}$  součtem jeho (zobecněné) Fourierovy řady vzhledem k takové posloupnosti  $\{\vec{e}_k\}$

$$\vec{f} = \sum (\vec{f}, \vec{e}_k) \vec{e}_k$$

je nejdůležitějším důsledkem úplnosti Hilbertova prostoru (zde prostoru  $L_2$  všech funkcí integrovatelných s kvadrátem). V tomto smyslu je waveletová analýza jenom jedním speciálním případem Fourierovy analýzy sensu lato [26].

### 4. Differentia specifica

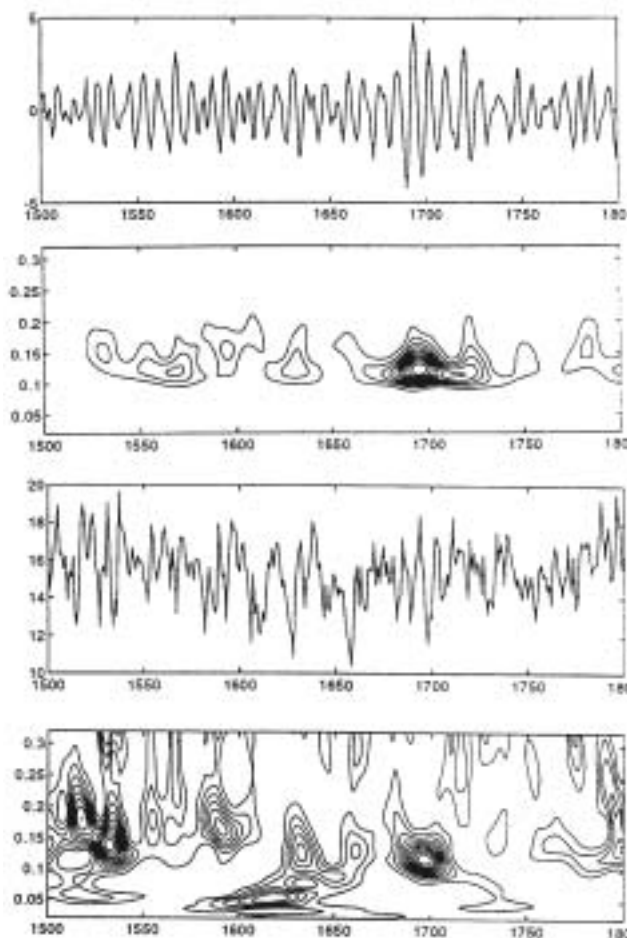
Od jiných funkcionálních transformací se waveletová transformace odlišuje ve dvou aspektech: má dva para-

metry (měřítkový a polohový) a oba parametry patří do (jednoho a téhož) přímého prostoru  $P$  :

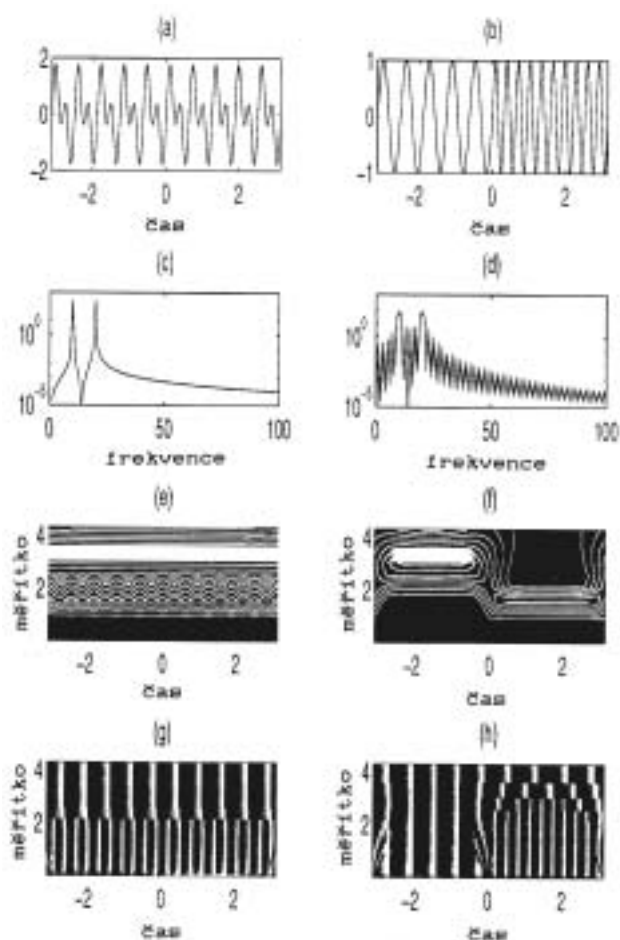
$$w(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

kde  $t, a, b \in P$ . Waveletová transformace tedy zobrazuje zkoumaný signál, reálnou funkcí  $f(t)$  jedné reálné proměnné  $t$ , jako komplexní nebo reálnou funkci  $w(a, b)$  dvou reálných proměnných  $a$  a  $b$ , jež představují polohy ( $b$ ) a šířky ( $a$ ) waveletových impulsů, tedy oněch složek, na které signál waveletovou analysou rozkládáme (viz obr.2). Hodnota  $w(a, b)$  waveletové transformanty vyjadřuje pak výšku řečeného impulsu. Interpretace waveletové transformanty je proto velice přímočará a její jednotlivé charakteristiky (jednotlivé charakteristiky obrazu) mají bezprostřední vztah k průběhu analysovaného signálu (originálu)  $f(t)$ . Na grafu funkce  $f(t)$  můžeme přímo ukázat kde který waveletový impuls leží, jak je vysoký a jakou má šířku. Říkáme, že waveletová transformanta nese lokální informaci v přímém prostoru (v prostoru, který je oborem nezávisle proměnných signálu  $f(t)$ ).

Na rozdíl od toho například při Fourierově transformaci sensu stricto představují jednotlivé složky roz-

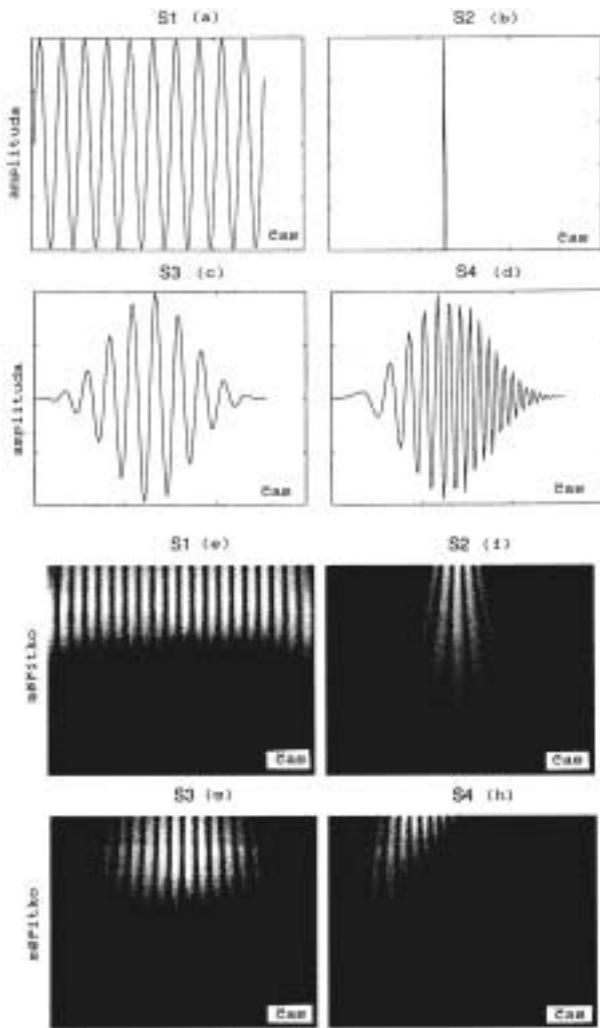


**Obr.2.** Dvě časové řady (a) a (c) a jejich waveletové transformanty (b) a (d). Polohový parametr waveletové transformanty je na ose úseček (časové ose) a měřítkový parametr (vyjadřující šířku waveletu) na ose pořadnic.



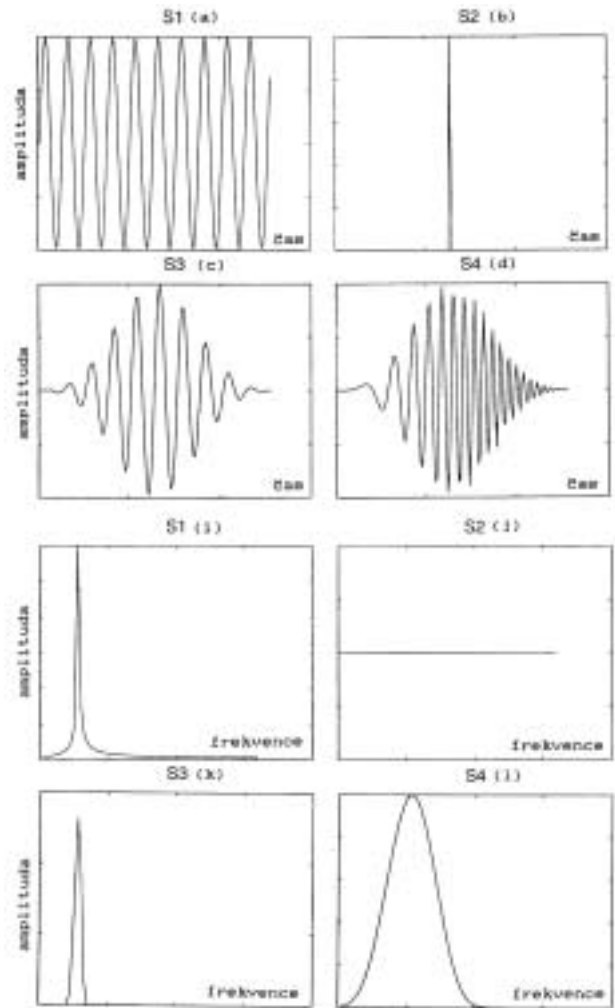
**Obr.3.** Porovnání Fourierovy analyzy sensu stricto a waveletové analyzy dvou signálů. První signál (a) obsahuje dvě frekvence (je superposicí dvou sinusových signálů  $\sin 10t + \sin 20t$ ); druhý signál (b) obsahuje tytéž dvě frekvence, jeť se však uplatňují postupně, kaťdá vťdy pro jednu polovinu doby trvání signálu. Obrázky (c) a (d) představují Fourierova spektra sensu stricto (čtverec modulu amplitudy Fourierovy transformanty sensu stricto jako funkci frekvence) pro signály (a) a (b). Obrázky (e) a (f) představují moduly waveletových transformant těchto dvou signálů a obrázky (g) a (h) fáze jejich waveletových transformant (za pouťití Morletova waveletu). Fourierova transformanta sensu stricto přináší globální informaci o analysovaných signálech, zatímco waveletová transformace uvádí informaci lokální.

kladu rovinné vlny, které mají určitou vlnovou délku (odpovídající frekvenci) a směr šíření. Tu jít interpretace tak názorná není. Jednotlivé komponenty (vlny) mapují periodicity, tedy globální charakteristiky analysovaného procesu; nelze na ně "ukázat prstem", nelze je na grafu funkce  $f(t)$  lokalizovat. Je to ostatně patrné ze vzorců popisujících basální funkce. V případě waveletů  $g[(t-b)/a]$  mají oba parametry,  $a$  (měřítkový) i  $b$  (translační) tentýž fyzikální rozměr jako veličina  $t$ ; waveletová transformanta, obraz  $w(a, b)$  je funkcí (fyzikálně) téže veličiny jako originál  $f(t)$  - mluvíme o přímém prostoru. V případě Fourierovy transformace sensu stricto rozkládáme předmětnou funkci na harmonické komponenty -  $a(k)$  sinkt. Argument k této transformanty - amplitudy  $a(k)$  složky řečeného rozkladu - jest veličina, jejíť fyzikální rozměr je reciprokou hodnotou fyzikálního rozměru nezávisle proměnné  $t$



**Obr.4.** Lokální charakteristiku čtyř signálů S1, S2, S3 a S4, jejichž průběh je znázorněn na obrázcích (a), (b), (c) a (d) vyjadřuje waveletová transformanta - obr. (e), (f), (g) a (h).

analyzovaného signálu  $f(t) - [k] = 1/[t]$ : Fourierova transformace sensu stricto je zobrazením do recipročního prostoru. To se dobře uplatňuje například při difrakci, kdy jednotlivé složky difraktovaného záření jsou monochromatické vlny, tedy funkce basálního systému, na jejichž základě je Fourierova transformace sensu stricto zkonstruována. Také při analýze signálů, v jejichž podstatě je nějaká periodicitu (pravidelnost) ukryta, neboť ta je pak snadno Fourierovou transformací rozpoznána jako globální charakteristika procesu. Pokud se jedná o signály "nepravidelné", bez výrazných globálních rysů, pak jejich Fourierova analýza sensu stricto žádný zvláštní užitek nepřinese (kromě potvrzení, že žádné takové globální rysy zkoumaný signál nemá). Zato se tu ale znamenitě uplatní waveletová analýza, která průběh procesu  $f(t)$  krok po kroku zmapuje a vyjádří superposicí dokonale lokalizovaných waveletových impulsů (obr. 3 ať 5). V obecném případě je ovšem nejlépe vypočítat a zkoumat obě transformanty, waveletovou (WT) i Fourierovu transformantu sensu stricto (FT). Každá z nich přináší o signálu  $f(t)$  jiné informace, jeť se vzájemně doplňují a umožňují jej komp-

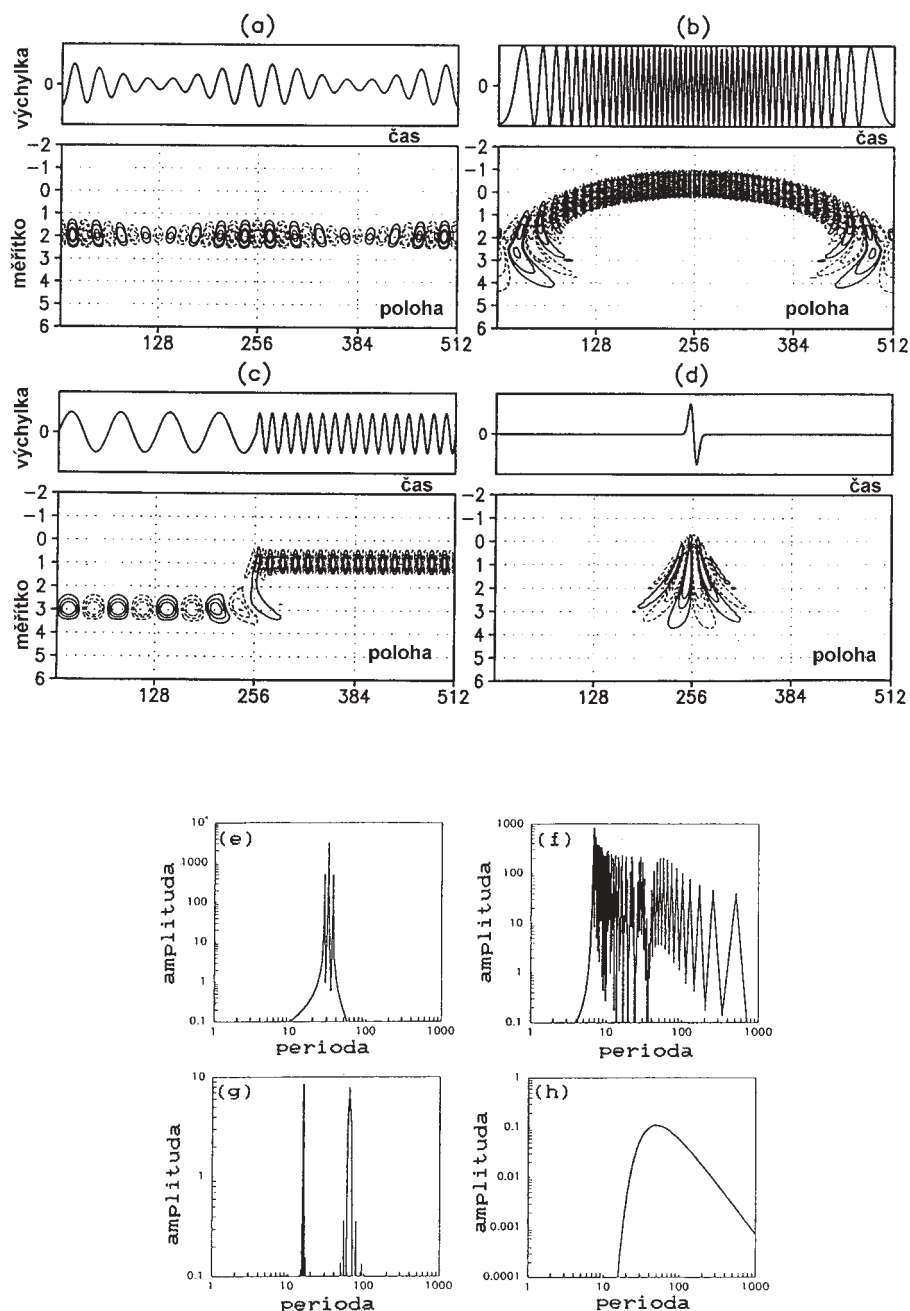


**Obr.5.** Globální charakteristiku čtyř signálů S1, S2, S3 a S4, jejichž průběh je znázorněn na obrázcích (a), (b), (c) a (d) vyjadřuje Fourierova transformanta sensu stricto - obr.(i), (j), (k) a (l).

lexněji popsat a pochopit podstatu procesu, který je tímto signálem vyjádřen. Určitým kompromisem mezi WT, jeť se uplatňuje při identifikaci lokálních charakteristik a FT, která je užitečná při extrakci charakteristik globálních, je okénková Fourierova transformace sensu stricto (OFT) [27]. Je to vlastně FT aplikovaná postupně na "okénka", to jest segmenty  $(a, a_1)$ ,  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_2, a_3)$ , ... ,  $[a_{(n-1)}, a_n = b]$ , na něž obor  $(a, b)$  nezávisle proměnné  $t$  zkoumaného signálu  $f(t)$  rozdělíme  $(a, a_1)$   $(a_1, a_2)$  ...  $[a_{(n-1)}, a_n = b] = (a, b)$ .

Tak dostaneme globální charakteristiky signálu  $f(t)$  pro každý z dílčích segmentů, tedy "globální charakteristiky lokalizované".

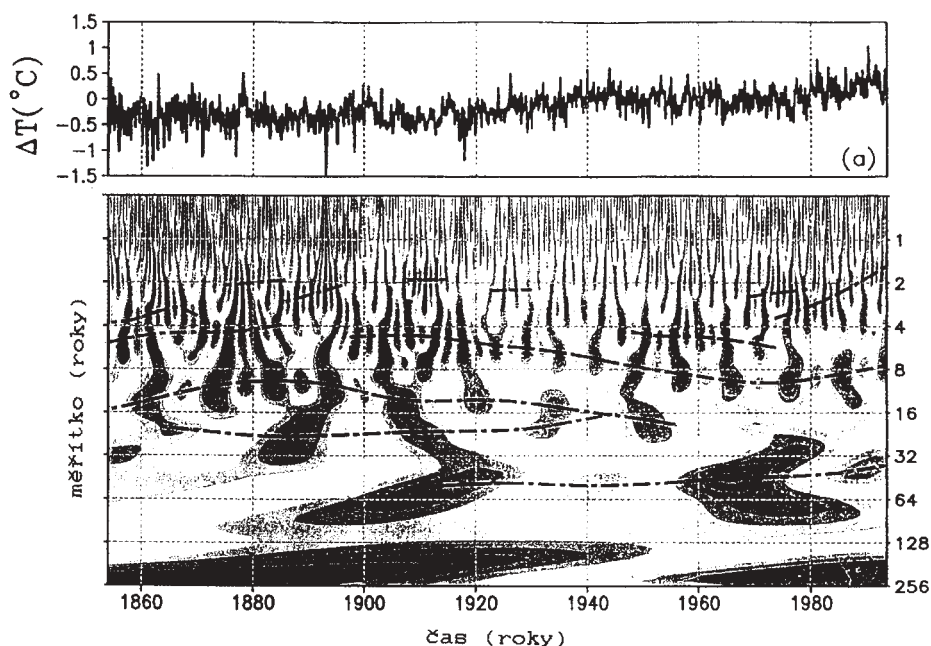
Jak už to s kompromisy bývá, ani OFT není bez problémů. Kontrast, který zvýrazněným periodicitám propůjčuje, je totiž výsledkem konstruktivní (a destruktivní) interference jednotlivých elementárních příspěvků od (digitalizovaného) signálu v rámci zvoleného okénka. Čím větší má být laterální rozlišení (čím menší okénko), tím bude počet elementárních příspěvků (jejichž



**Obr.6.** Čtyři signály ilustrující: (a) amplitudovou modulaci, (b) frekvenční modulaci, (c) náhlou změnu frekvence a (d) náhlou změnu amplitudy a jejich Morletova waveletová transformanta. Z obrázků je patrné, že waveletová transformanta reflektuje citlivě nejen lokální charakteristiky předmětných signálů, ale i jejich charakteristiky globální. Pro porovnání se na obrázcích (e), (f), (g) a (h) uvádějí Fourierovy transformanty signálů (a) ať (d). Dokumentovaný materiál přesvědčivě dokazuje, že waveletová transformace je mocný a univerzální nástroj analýsy signálů.

nejmenší odlehlost je omezena možnostmi měřicí techniky, kterou se údaje o signálu  $f(t)$  vzorkují) menší a jejich interference méně účinná. Platí zde jakýsi "princip neurčitosti": čím více lokální informace, tím méně informace globální. Je velmi významným užitečným rysem WT, že tato omezení OFT dokáže překročit. Dokumentuje to obr.6, který ilustruje schopnost WT rozpoznat globální charakteristiky analysovaných procesů (signálů). Není to arci zdaleka tak jednoduché, jako identifikace globálních

charakteristik pomocí FT. Ale je to možné, je to dobře možné, a to činí z WT nástroj pro analýsu signálů univerzálnější a také asi laické veřejnosti přístupnější, než je FT. Na druhé straně se dá očekávat, že popularita WT vytvoří předpoklady pro větší zájem o integrální transformace obecně a o FT zvláště.



**Obr. 7.** Teplota na severní polokouli: (a) a reálná část její Morletovy waveletové transformanty (b). Čerchované čáry označují vývoj dominantních periodicit (cyklů).

## 5. Využití

Hlavní oblastí využití waveletové transformace je rozbor nestacionárních procesů [28-51]. Jako příklad uvedme waveletovou analýzu časové závislosti teplot na severní polokouli v letech 1854-1993 [17], která umožnila rozpoznat a sledovat vývoj dominantních cyklů na třech úrovních: meziroční (2 - 5 let), mezidekadové (10 - 12 let, 20- 25 let a 40 - 60 let) a staleté (180 let) (obr. 7).

To, že waveletová transformace operuje v přímém prostoru, umožňuje její výhodné využití při vyhlazování (odstraňování šumu, to jest vysokofrekvenční složky) pozadí rozličných datových souborů. Jde o to, že vyhlazovat by se mělo podle poměru amplitud a rozdílnosti frekvenčních charakteristik užitečného signálu a pozadí, jeť jsou v různých úsecích ošetřovaného signálu obecně různé. A právě to aparát waveletové transformace dobře umožňuje [52 - 73] (obr. 8). V podstatě se jedná o filtraci v prostoru waveletových obrazů: k signálu  $f(t)$  zkonstruujeme jeho waveletový obraz

$$w(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_{a,b}(t)} dt$$

a vlastní manipulaci, jeť je podstatou filtrování,  $m(a, b)$ .  $w(a, b)$  provedeme v tomto obrazovém prostoru; zpětnou transformací dostaneme pak filtrovaný signál

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} m(a, b) w(a, b) g_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

v jeho předmětném prostoru.

Wavelety se často používají také k řešení nejrůznějších úloh, jejichž podstatou je filtrování [74-78]. Představují totiž flexibilní soubory filtrů s říditelnými

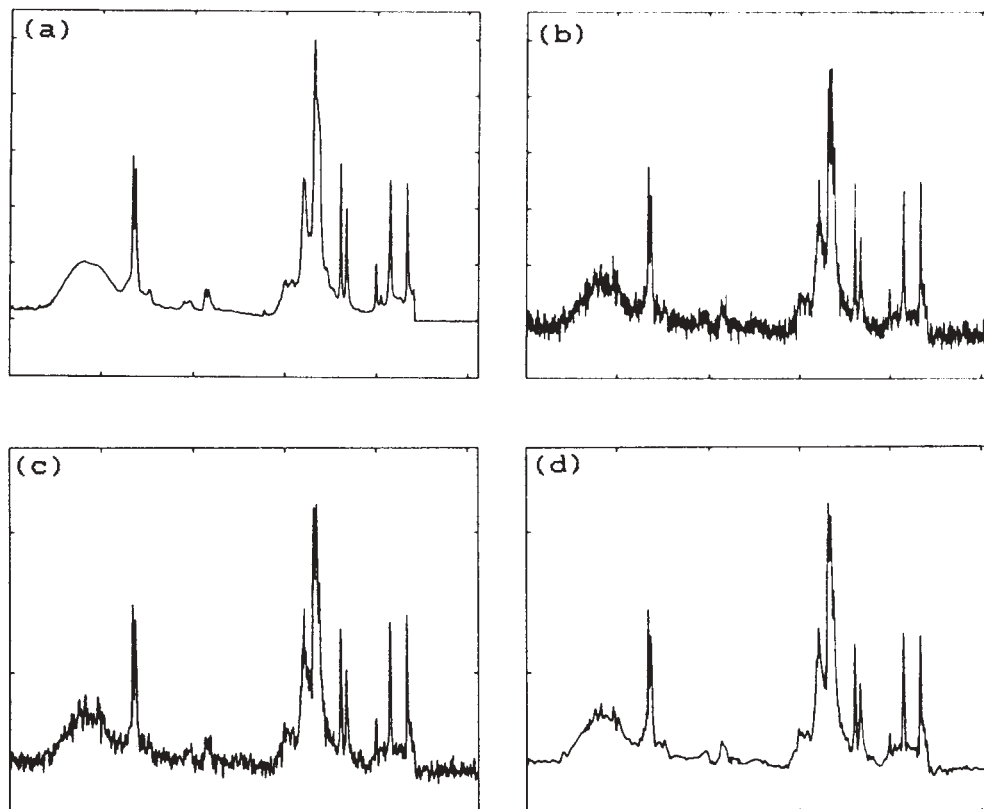
morfologickými charakteristikami (poloha, šíře a tvar waveletu), které se pro takové účely znamenitě hodí.

## 6. Závěr

Waveletová transformace je novým, velice účinným nástrojem pro analýzu a zpracování signálů (souborů dat, časových řad a obrazů). Je to svým způsobem "matematický mikroskop": umožňuje zkoumat pozorovaná data lokálně (místo od místa), a to s měnlivým měřítkem ("v různém zvětšení"). V angličtině se pro waveletovou transformaci často používá označení "multiresolution analysis" nebo "multiscale analysis". Komerční software dovolí každému, aby si waveletovou transformaci sám ozkoušel a získal při jejím používání vlastní zkušenosti. To je důležité, protože se jedná o techniku novou a interpretace jejích výsledků může v sobě skrývat nejedno úskalí [79].

## Literatura

1. J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau & D. Giard, *Geophysics*, **47** (1982), 203-221.
2. J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau & D. Giard, *Geophysics*, **47** (1982), 222-236.
3. J. Fourier : Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. Didot.
4. A. Grossmann, J. Morlet & T. Paul, *J. Math. Phys.*, **26** (1985), 2473 - 2479.
5. A. Grossmann, J. Morlet & T. Paul, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **45** (1986), 293-309.
6. C.R. Handy & R. Murenzi, *J. Physics A*, **30** (1997), 4709 - 4729.



**Obr. 8.** "Čistý" signál (a), signál se šumem (b), signál (b) po vyhlazení pomocí Fourierovy transformace sensu stricto (c), signál (b) po vyhlazení pomocí waveletové transformace (d).

7. C.J. Tymczak & X.Q. Wang, *Physical Review Letters*, **78** (1997), 3654 - 3657.
8. C.K. Chui: *An Introduction to Wavelets*. London 1992. Academic Press.
9. Y. Meyer: *Wavelets - Algorithms and Applications*. Philadelphia 1993. SIAM.
10. G.G. Walter: *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*. Boca Raton (Florida) 1994. CRC Press.
11. M.V. Wickerhauser: *Adaptive Wavelets Analysis from Theory to Software*. Wesseley (Massachusetts) 1994. A.K.Peters.
12. E. Foufoula-Georgiou & P. Kumar, eds.: *Wavelets in Geophysics*. London 1994. Academic Press.
13. Y.T. Chan: *Wavelet Basics*. Norwell (Massachusetts) 1995. Kluwer Academic Publisher.
14. E. Hernández & G. Weiss: *A First Course on Wavelets*. Boca Raton (Florida) 1996. CRC Press.
15. C.K. Chui: *Wavelets - Mathematical Tool for Signal Processing*. Philadelphia 1997. SIAM.
16. M. Farge, *Annu.Rev.Fluid Mech.*, **24** (1992), 395-457.
17. K.M. Lau & H. Weng, *Bulletin of the American Meteorological Society*, **76** (1995), 2391-2402.
18. N.M. Astafeva, *Physics -Uspekhi*, **39** (1996), 1085 - 1108.
19. B.K. Alsberg, A.M. Woodward & D.B.Kell, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **37** (1997), 215-239.
20. B. Walczak & D.L. Massart, *Trends in Analytical Chemistry*, **16** (1997), 451-463.
21. P. Kumar & E. Foufoula-Georgiou, *Reviews of Geophysics*, **35** (1997), 385-412.
22. Ch. Torrence & G.P. Compo, *Bulletin of the American Meteorological Society*, **79** (1998), 61-78.
23. V. Volterra: *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York 1959. Dover Publications.
24. K.G. Beauchamp: *Walsh Functions and Their Applications*. London 1975. Academic Press.
25. A. Kolmogorov & S.V. Fomin: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. Praha 1975. SNTL.
26. R. Courant & D. Hilbert : *Methoden der mathematischen Physik, Band I. Zweite Auflage*. Berlin 1931. Springer.
27. D. Gabor, *J.IEE*, **96** (1946), 429-457.
28. H.S. Liu & B.J. Chao, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **55** (1998), 227-236.
29. V. Dose, G.Venus & H. Zohm, *Phys.Plasmas*, **4** (1997), 323 - 328.
30. D. Jordan, R.W. Miksad & E.J. Powers, *Review of Scientific Instruments*, **68** (1997), 1484-1490.



31. P.C. Liu & G.S. Miller, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **13** (1996), 1090-1099.
32. G. Foster, *The Astronomical Journal*, **112** (1996), 1709 - 1729.
33. D.M. Sonechkin, N.M. Datsenko & N.N. Ivashchenko, *Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics*, **33** (1997), 167-176.
34. A. Prokoph & F. Barthelmes, *Computers and Geosciences*, **22** (1996), 1097- 1108.
35. Z.Z. Hu & T. Nita, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **74** (1996), 833-844.
36. Y. Ding, T. Nanba, Y. Miura & A. Osaka, *Journal of Non-Crystalline Solids*, **222** (1997), 50-58.
37. D.B. Percival & H.O. Mofjeld, *Journal of the American Statistical Association*, **92** (1997), 868-880.
38. K. Liu, S. Martin & R. Kwok, *Journal of the Atmospheric and Oceanic Technology*, **14** (1997), 1187-1198.
39. N. Saito & R.R. Coifman, *Geophysics*, **62** (1997), 192 - 1930.
40. A. Ziolkowski, J.R. Underhill & R.G.K. Johnston, *Geophysics*, **63** (1998), 297-313.
41. K. Yomogida, *Geophys.J.Int.*, **116** (1994), 119-130.
42. A. Onergli & P. De Felice, *Meteorology and Atmospheric Physics*, **63** (1997), 171-178.
43. S.A. Smith & P.R. Jonas, *Ann. Geophysicae*, **15** (1997), 1447 - 1456.
44. S. Santoso, E.J. Powers, R.D. Bengston & A. Ourona, *Rev.Sci.Instrum.*, **68** (1997), 898-901.
45. S. Baliunas, P. Frick, D. Sokoloff & W. Soon, *Geophysical Research Letters*, **24** (1997), 1351-1354.
46. J. Jiang, D. Zhang & K. Fraedrick, *International Journal of Climatology*, **17** (1997), 969-981.
47. P. Frick, S.L. Baliunas, D. Galyagin, D. Sokoloff & W. Soon, *The Astrophysical Journal*, **483** (1997), 426-434.
48. M.S. Foster, K.R. Nunn., S.A. Lewis & D.J. Reynolds, *Geophysics*, **62** (1997), 352-361.
49. A. Hempelmann & R.A. Donahue, *Astronomy and Astrophysics*, **322** (1997), 835-840.
50. B.K. Joseph, R. Jha, P.K. Kaw, S.K. Mattoo, C.V.S. Rao & Y.C. Saxena, *Phys.Plasmas*, **4** (1997), 4292-4300.
51. R. Jha, S.K. Mattoo & Z.C. Saxena, *Phys.Plasmas*, **4** (1997), 2982-2988.
52. B.K. Alsberg, A.M. Woodward, M.K. Wilson, J. Rowland & D.B. Kell, *Analyst*, **122** (1997), 645-652.
53. M. Pilard & Y. Epelboin, *J.Appl.Cryst.*, **31** (1998), 36-46.
54. S.G. Nikolov, H. Hutter & M. Grasserbauer, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **34** (1996), 263-273.
55. J.R. Jordan, R.J. Latatits & D.A. Carter, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **14** (1997), 1280 - 1297.
56. A.G. Major, H.M. Fretwell, S.B. Dugdale, A. Rodriguez - González & M.A. Alam, *Materials Science Forum*, **255 - 257** (1997), 563 - 565.
57. A.G. Major, H.M. Fretwell, S.B. Dugdale, A. Rodriguez - González & M.A. Alam, *J.Phys.: Condens.Matter*, **9** (1997), 10293 - 10299.
58. M. Fligge & S.K. Solanki, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, **124** (1997), 579-587.
59. M. Wolkenstein, H. Hutter, S.G. Nikolov & M. Grasserbauer, *Fresenius Journal of Anal.Chem.*, **357** (1997), 783-788.
60. I.M. Johnstone & B.S. Silverman, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **59** (1997), 319-351.
61. M. Wolkenstein, H. Hutter, S.G. Nikolov, I. Schmitz & M. Grasserbauer, *J. Trace and Microprobe Techniques*, **15** (1997), 33-49.
62. Ch.R. Mittermayr, E. Rosenberg & M. Grasserbauer, *Analytical Communications*, **34** (1997), 73-75.
63. N. Hirai, N. Takao, S. Nishimoto & K. Arii, *Japanese Journal of Applied Physics*, **35** (1996), 6282-6285.
64. E.D. Kolaczyk, *Journal of the American Statistical Association*, **91** (1996), 1079-1090.
65. J.L. Starck & F. Murtagh, *Astronomy and Astrophysics*, **288** (1994), 342-348.
66. J.L. Starck, F. Murtagh, B. Pirenne & M. Albrecht, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, **108** (1996), 446-455.
67. J.L. Starck, R. Siebenmorgen & R. Gredel, *The Astronomical Journal*, **482** (1997), 1011-1020.
68. M. Wolkenstein, H. Hutter & M. Grasserbauer, *Fresenius Journal Anal. Chem.*, **358** (1997), 165-169.
69. V.J. Barclay, R.F. Boner & I.P. Hamilton, *Anal. Chem.*, **69** (1997), 78-90.
70. C.R. Mittermayr, S.G. Nikolov, H. Hutter & M. Grasserbauer, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **34** (1996), 187-202.
71. B. Walczak & D.L. Massart, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **36** (1997), 81-94.
72. Y. Zhang & K.V. Paulson, *Pure and Applied Geophysics*, **149** (1997), 405-419.
73. R.J. Recknagel & G. Nontur, *Optics Communications*, **148** (1998), 122-128.
74. J.L. Starck & A. Bijaoni, *Signal Processing*, **35** (1994), 195-211.
75. E.L. Andreas & G. Trevino, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **14** (1997), 554-564.
76. P. Gaillot, J. Darrozes & M.S. Blanquat, *Geophysical Research Letters*, **24** (1997), 1819-1822.
77. R.A. Maestre, J. García & C. Ferreira, *Optics Communications*, **133** (1997), 401-414.
78. H. Serrai, L. Senhadji, J.D. Cartaines & J.L. Coatrieux, *Journal of Magnetic Resonance*, **124** (1997), 20-34.
79. G. Trevino & E.L. Andreas, *Boundary-Layer Meteorology*, **81** (1996), 271-288.



